Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
Section des Sciences, 8me série, t. II, no 3

UNDERSØGELSER

OVER EN KLASSE

FUNDAMENTALE ULIGHEDER

I DE

ANALYTISKE FUNKTIONERS THEORI. I.

AF

J. L. W. V. JENSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og mathematisk Afd., 8. Række II. 3.

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1916

Pris: 90 Øre.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35.
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884.	4.	»
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
	III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	»
1.	**Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	»
2.	**Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
3.	**Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4.	**Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.
	IV, med 25 Tavler. 1886—88	21.	50.
1.	**Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886	10.	50.
2.	**Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886	1.	50.
3.	**Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887	1.	60.
4.	**Lütken, Chr.** Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	60.
5.	—— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	75.
6.	—— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en français. 1887	4.	75.
7.	**Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888	1.	30.
8.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888	6.	45.
	V, med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91	15.	50.
1.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*. Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889	2.	75.
2.	**Valentiner, H.** De endelige Transformations-Gruppers Theori. Résumé en français. 1889	5.	50.
3.	**Hansen, H. J.** Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbertavler. Résumé en français. 1890	9.	50.
4.	**Lorenz, L.** Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne. 1891	»	75.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

UNDERSØGELSER

OVER EN KLASSE

FUNDAMENTALE ULIGHEDER

I DE

ANALYTISKE FUNKTIONERS THEORI. I.

AF

J. L. W. V. JENSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og mathematisk Afd., 8. Række II. 3.

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1916

Vennen,

den berømte Forsker

og den utrættelige

Befordrer af videnskabeligt mathematisk Arbejde

G. MITTAG-LEFFLER

paa hans

70-aarige Fødselsdag d. 16. Marts 1916

tilegnes denne Afhandling

af Forfatteren.

Undersøgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori.*)

I.

§ 1. Indledning.

I de senere Aar er en Klasse af funktionstheoretiske Opgaver mere og mere traadte i Forgrunden, nemlig Problemer af følgende Natur. Man betragter en iøvrigt vilkaarlig analytisk Funktion $y = y(x)$ af den komplekse Variable x, og Funktionen y antages at være regulær indenfor Cirklen $|x| < R$; med andre Ord vi betragter en vilkaarlig hel Potensrække af x med en Konvergensradius $\geq R$. Nu antager man endvidere om denne Funktion, at $|y| < M$, eller at $\Re(y) < A$ eller lignende**), alt saalænge $|x| < R$, og yderligere at man kender Funktionens Værdi i et bestemt Punkt indenfor Cirklen, sædvanligvis Centrum, ɔ: $y(0)$ er bekendt. Hvad kan der da yderligere i al Almindelighed udsiges om Funktionen, hvad kan der siges om dens absolutte Værdi, om dens reelle eller dens imaginære Del, om dens Nulpunkter eller om Omraader, hvori den ingen Nulpunkter har, om dens Deriverede o. s. v.?

I det følgende skal jeg, inden jeg fremstiller mine egne Undersøgelser, give en lille Oversigt (i det Omfang, hvori Litteraturen herom har været mig bekendt) over de mer eller mindre specielle Resultater af denne Art, som er fundne af Mathematikere, der har leveret væsentlige Bidrag til Løsningen af herhenhørende Problemer. **Jeg anvender herved overalt stærkt ændrede Betegnelser,** som staar i Samklang med de af mig i det Følgende anvendte, for at Sammenligning bedre kan finde Sted.

1°, (1869). Først og fremmest maa vi nævne en Sætning af Schwarz[1]), som kan udtales paa følgende Maade. Naar y, foruden at være regulær og absolut mindre end M indenfor Cirklen $|x| = R$, har den Egenskab, at $y(0) = 0$, vil indenfor det givne Omraade

---

*) Væsentlige Dele af denne Afhandling har jeg allerede meddelt i to Foredrag, nemlig eet ved Forelæggelsen af disse mine Undersøgelser for det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab i Mødet den 19. Novbr. 1915, og et andet tidligere i Mathematisk Forening den 16. September 1915 angaaende Regning med sædvanlige komplekse Tal med Anvendelse paa Funktionstheorien.

**) Angaaende Betegnelserne henvises til § 2.

[1]) H. A. Schwarz: Zur Theorie der Abbildung. Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich für das Schuljahr 1869—70; Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 108—132; (se S. 110—111).

$$|y| \leq \frac{M}{R}|x|.$$

Carathéodory[2]) har vel først fremdraget den store Vigtighed af denne Sætning og bevist den paa en meget simpel og elementær Maade. Benævnelsen „det Schwarz'ske Lemma“, som denne Forfatter har indført, vil jeg i det Følgende benytte.

2°, (1892). Til Løsningen af den Opgave, at bestemme Egenskaber af y indenfor den oftnævnte Cirkel, naar der var givet en positiv højere Grænse for Funktionens reelle Del, har Hadamard[3]) givet et Bidrag, som foranledigede Borel[4]) til følgende Løsning af et herhenhørende Problem:

$$|y| < |\Re y(0)| + |\Im y(0)| + \left(4A + 2|\Re y(0)|\right)\frac{|x|}{R-|x|},$$

hvor A betegner en højere (positiv) Grænse for $\Re(y)$, den reelle Del af y, og $\Im(y)$ betegner den „imaginære Del“ af y (eller mere korrekt udtrykt: Koefficienten til den rent imaginære Del).

Schottky[5]) forbedrede ved Hjælp af det Cauchy'ske Integral denne Løsning ved følgende Formel

$$|y| \leq |\Im y(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Re y(re^{i\theta})|\, d\theta \cdot \frac{r+|x|}{r-|x|},$$

hvor $|x| < r < R$. Overensstemmende med Tankegangen i det i Noten citerede Arbejde faas heraf med samme Betegnelser som før

$$|y| \leqq |\Im y(0)| + \left(2A - \Re y(0)\right)\frac{R+|x|}{R-|x|}.$$

Carathéodory[6]) forbedrede dette til

$$|y| \leqq |\Im y(0)| + 2A\frac{|x|}{R-|x|} + |\Re y(0)|\frac{R+|x|}{R-|x|},$$

hvor der ikke gøres nogen Forudsætning om, at A skal være positiv. Denne Formel har almindeligt faaet Navn af „Carathéodory's Sætning“.

---

[2]) C. Carathéodory: Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, B. 141, Paris 1905, S. 1213—1215.

E. Landau: Über den Picardschen Satz. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 51, 1906, S. 252—318; (se S. 271).

C. Carathéodory: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Grössen. Mathemathische Annalen, B. 72, 1912, S. 107—144; (se S. 110).

[3]) J. Hadamard: Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$. Comptes Rendus, B. 114, 1892, S. 1053—1055.

[4]) E. Borel: Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Comptes Rendus, B. 122, 1896, S. 1045—1048.

[5]) F. Schottky: Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen. Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1904, S. 1244—1262; (se S. 1246—1247).

[6]) E. Landau, l. c. [2]) (se S. 277). Se ogsaa: E. Landau: Beiträge zur analytischen Zahlentheorie. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, B. 26, 1908, S. 169—302; (se S. 191—193).

3°, (1899). Angaaende Nulpunkterne af y gav FORF.[7]) et Resultat, som kan gengives saaledes. Naar y er regulær for $|x| < R$, og $|y| < M$, samt $x_1, x_2, \ldots x_n$ betegner de Nulpunkter af y, som ligger indenfor eller paa Omkredsen af $|x| = r < R$, vil

$$M > |y(0)| \frac{R^n}{|x_1 x_2 \ldots x_n|}.$$

Herved var det evident, at y ikke har Nulpunkter for $|x| < \frac{|y(0)|}{M} R$.

En Forbedring af denne Sætning blev givet af CARATHÉODORY og FÉJER[8]), som, foruden at give et nyt Bevis, paaviste at Lighedstegnet kunde indtræde i ovenstaaende Ulighed, naar y tilhørte en vis Klasse af rationale Funktioner af x. (Iøvrigt maa jeg her anføre, at denne Afhandling i Forening med mine egne Methoder til bekvem Regning med komplekse Tal, har været en væsentlig Anledning til, at den nærværende Afhandling ser Lyset).

Et noget mere omfattende Resultat er fornyligt givet af LANDAU[9]), som viser, at naar η er en Konstant absolut mindre end M, og $x_1, x_2, \ldots x_n$ er Nulpunkter af Funktionen $y - \eta$ indenfor $|x| = R$, og η og $\bar{\eta}$ betegner konjugerede Tal, vil

$$\left|\frac{M^2 - \bar{\eta}\, y(0)}{M(y(0) - \eta)}\right| \geqq \frac{R^n}{|x_1 x_2 \ldots x_n|},$$

hvoraf kan udledes, at

$$y \neq \eta \quad \text{for} \quad |x| < \left|\frac{M(y(0) - \eta)}{M^2 - \bar{\eta}\, y(0)}\right| R.$$

LANDAU beviser forøvrigt den sidste Sætning direkte.

4°, (1906). Vedrørende $y'(x)$, den Deriverede af y, er et første Resultat vel fundet af LANDAU (l. c. [2]), S. 305—306), som beviser, at naar $|y| < M$ for $|x| < R$, vil

$$|y'(0)| \leqq \frac{M^2 - |y(0)|^2}{RM}.$$

Til dette Resultat slutter sig et tilsvarende af F. W. WIENER[10]), som kan skrives som følger

$$|y^{(n)}(0)| \leqq \lfloor n \, \frac{M^2 - |y(0)|^2}{R^n M}.$$

---

[7]) J. L. W. V. JENSEN: Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. Acta Mathematica, B. 22, 1899, S. 359—364; (se S. 362—363).

Anm. Forf. havde iøvrigt 3 Aar tidligere meddelt denne Sætning i et Foredrag i Mathematisk Forening i København. Beviset var her fuldstændig elementært.

[8]) C. CARATHÉODORY et L. FÉJER: Remarques sur le théorème de M. Jensen. Comptes Rendus, B. 145, 1907, S. 163—165.

[9]) E. LANDAU: Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie. The Tôhoku Mathematical Journal, B. 5, 1914, S. 97—116; (se S. 107 og S. 105).

[10]) H. BOHR: A theorem concerning power series. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, B. 13. I, 1913; (se den deri benyttede Hjælpesætning).

5°, (1908). Den mest omfattende Række af Resultater, henhørende til de her behandlede Problemer, er imidlertid givet af LINDELÖF[11]), som ved Hjælp af Theorien for Green's Funktioner og konform Afbildning opstiller et Princip, der — som han udførligt viser — giver Løsninger af en hel Række af Problemer, hvilke som specielle Tilfælde omfatter de under 1°, 2° og 4° nævnte. Hertil føjes saa nye, elegante og vigtige Resultater, saasom en Udvidelse af det Schwarz'ske Lemma:

$$|y| \leqq M \frac{R|y(0)| + M|x|}{RM + |y(0)x|}, \text{ naar } |y| < M \text{ for } |x| < R,$$

en elegant Udvidelse af Landau's omstaaende Formel:

$$|y'(x)| \leqq \frac{R}{M} \frac{M^2 - |y|^2}{R^2 - |x|^2},$$

og lignende, foruden Bestemmelsen af en Del af Cirklen $|x| < R$ i Omgivelsen af det vilkaarligt valgte Punkt x_0, i hvilket $y \neq 0$. Derimod har han ikke berørt de andre Problemer, hørende under 3°, ligesom han som oftest — i Lighed med de andre Forfattere — indskrænker sig til at antage $y(0)$ som den Værdi af Funktionen y, man antager bekendt, og ikke gør den nærliggende Udvidelse til Theoremer, hvor det er $y_0 = y(x_0)$, som antages bekendt for et vist, men iøvrigt vilkaarligt valgt x_0. I det Følgende vil jeg faa Lejlighed til at nævne de Lindelöf'ske Theoremer enkeltvis, idet de optræder som meget specielle Tilfælde af andre mere almindelige Sætninger.

6°, (1914). CARATHÉODORY[12]) har vel først angivet en Formel for Differenskvotienten, nemlig

$$\left|\frac{y - y_0}{x - x_0}\right| \leqq \frac{R}{M} \frac{|M^2 - \bar{y}_0 y|}{|R^2 - \bar{x}_0 x|} < \frac{2MR}{R^2 - |x_0 x|}.$$

Til disse Formler er følgende at bemærke. Den første Ulighed giver for $x_0 \to x$ LINDELÖF's ovenstaaende Formel; den anden er blot en grov Tilnærmelse, som imidlertid er fuldt tilstrækkelig til det Formaal, hvortil den benyttes i den citerede Afhandling.

Ved nøjere Betragtning af de ovennævnte Løsninger af en Del specielle Problemer findes der en Mangel paa Sammenhæng i Behandlingen, som det synes mig nyttigt at hæve. I denne Afhandling har jeg derfor dels sammenarbejdet Theorien til et Hele og generaliseret Theoremerne ret betydeligt, saa at mine Resultater omfatter alle de ovennævnte som meget specielle Tilfælde foruden en hel Del nye Sætninger, hvoraf specielle Tilfælde hidtil ikke er bekendte, og dels forsøgt at gøre dette paa den simpleste og mest elementære Maade. Jeg haaber, at det vil fremgaa af det Følgende, at det næppe vil være muligt at reducere Løsningerne af disse Problemer

---

11) E. LINDELÖF: Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et Sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, Tom. XXXV, Nr. 7, S. 1—35.

12) C. CARATHÉODORY: Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen. Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet, Berlin 1914, S. 19—41; (se S. 23).

til højere Grad af Simpelhed eller basere dem paa et mindre Maal af Forudsætninger, som tilmed alle tilhører den Del af den elementære Funktionslære, som med størst Elegance kan bevises ved Potensrækkernes Theori.

Det er vel næsten overflødigt at nævne, at de berømte PICARD'ske Sætninger, eller snarere de elementære Beviser og Udvidelser heraf, som er givet af BOREL, LANDAU og SCHOTTKY, paa det nøjeste hænger sammen med adskillige af vore Problemer, og da særligt med de under 2° nævnte. Dette fremgaar jo for øvrigt af de under [2, 4, 5]) citerede Titler. Det ligger imidlertid udenfor denne Afhandlings Formaal at gaa ind paa Anvendelser af de opstillede Theoremer; saadanne er forøvrigt ganske nærliggende.

Inden jeg gaar over til de Regler for Regning med sædvanlige komplekse Tal, som danner den største Del af de Hjælpesætninger, hvorpaa jeg støtter mig (og som sikkert kunde finde Plads i en Lærebog i Algebraens Elementer) maa jeg gøre en Bemærkning til de omhandlede Problemer og deres Løsninger. Ved disse udleder man af de Uligheder, som i Forening med visse simple Antagelser danner Forudsætningerne for Løsningen, andre Uligheder, ofte af en helt anden Form. I visse Tilfælde, ofte ved de vigtigste Problemer, kan man ved en algebraisk Omformning af Ulighederne a fortiori vende tilbage til nøjagtig de samme Betingelser, hvorfra man gik ud. Lad os — for i det allersimpleste Tilfælde at gøre dette klart — se paa det Schwarz'ske Lemma. Af Forudsætningerne udleder man som Løsning $|y| \leq M\frac{|x|}{R}$; men heraf følger straks $y(0) = 0$, og af Uligheden følger a fortiori $|y| < M$, altsaa ganske de samme Forudsætninger, vi gik ud fra; tilmed optræder der et Lighedstegn, som ikke kan undværes. Naar disse Forhold optræder ved Løsningen af et Problem, saaledes som det jævnligt vil vise sig i det Følgende, siger vi, at Løsningen er af 1ste Klasse.

En Bemærkning angaaende Uligheder maa forudskikkes. Naar man ved endelige algebraiske Processer af en Ulighed $A_1 \leq B_1$ kan udlede en anden $A_2 \leq B_2$ og omvendt, hvorved Ulighedstegn svarer til Ulighedstegn, Lighedstegn til Lighedstegn, saa kaldes disse to Uligheder ækvivalente. Naar man derimod ikke ved Processer af den antydede Art kan vende tilbage fra den anden Ulighed til den første, siges den anden at være udledt a fortiori af den første.

§ 2. Formler og Regneregler for de sædvanlige komplekse Tal. Betegnelser, Definitioner og Hjælpesætninger.

I det Følgende er alle Tal, naar ikke andet udtrykkeligt bemærkes, vanlige komplekse Tal. Som sædvanligt betegnes ved u og $\bar{u}$ konjugerede Tal, ved $|u|$ den absolutte Værdi af u, og man har $u \cdot \bar{u} = |u|^2$. Ved $\Re(u) = \frac{1}{2}(u+\bar{u})$ betegnes den reelle Del af u, og ved $\Im(u) = \frac{1}{2i}(u-\bar{u}) = \Re\left(\frac{u}{i}\right)$ Koefficienten til i i den rent imaginære Del af u (forkortet læst som „den imaginære Del“ af u), eller

$$u = \Re(u) + i\,\Im(u).$$

Endvidere bruger vi undertiden Betegnelsen $\operatorname{sg}(u) = \frac{u}{|u|}$ (læs „Signum u“), naar $u \neq 0$, og $\operatorname{sg}(0) = 0$.

Med disse Betegnelser følger af $|u+v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v})$ Identiteten

$$|u+v|^2 = |u|^2 + 2\Re(u\bar{v}) + |v|^2, \text{*)}$$

som er af Betydning for det følgende. Af denne Identitet følger en anden

$$|\beta u + \alpha v|^2 - |\bar{\alpha} u + \bar{\beta} v|^2 = (|\beta|^2 - |\alpha|^2)(|u|^2 - |v|^2), \text{**)}$$

blot ved at bemærke, at Leddene med $\Re$ fra de to Kvadrater paa venstre Side er identiske. Af den sidste Identitet vil vi nu udlede alle de algebraiske Hjælpesætninger, vi har Brug for. Forinden maa vi bemærke, at da højre Side af Identiteten kun indeholder de absolutte Værdier af de fire indgaaende Variable, kan vi paa vilkaarlig Maade forandre Argumenterne til α, β, u, v i venstre Side, uden at forandre dennes Værdi.

Hjælpesætning 1. Naar α er et saaledes valgt kompleks Tal, at $|\alpha| < 1$, vil følgende Uligheder, hvori Uligheds- og Lighedstegn læste fra oven nedad svarer til hverandre,

$$|u| \lesseqgtr |v| \qquad \text{og} \qquad |u + \alpha v| \lesseqgtr |\bar{\alpha} u + v|$$

være ækvivalente.

Er derimod $|\alpha| > 1$, gælder samme Sætning, kun skal den ene af Ulighederne vendes om, ɔ: Tegnene fra oven nedad læses i omvendt Orden.

Er endelig $|\alpha| = 1$, vil stedse $|u + \alpha v| = |\bar{\alpha} u + v|$.

Beviset kan læses ud af vor Identitet ved at sætte $\beta = 1$ og betragte Fortegnene paa begge Sider.

Anm. Denne Hjælpesætning, som vi ogsaa kalder for α-Methoden, kan være meget nyttig til Omformning af Uligheder imellem de absolutte Værdier af komplekse Udtryk. Man kan, hvad vi i det Følgende jævnlig vil gøre Brug at, ofte bestemme

---

*) Til bekvem Regning med komplekse Tal er ogsaa følgende Identiteter nyttige:

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4\Re(u\bar{v}) \quad \text{eller} \quad |u|^2 - |v|^2 = \Re\big((u+v)(\bar{u}-\bar{v})\big),$$
$$|u+v|^2 - |u-\bar{v}|^2 = 4\Re(u)\Re(v) = |u+\bar{v}|^2 - |u-v|^2,$$
$$|u+v|^2 - |u+\bar{v}|^2 = 4\Im(u)\Im(v);$$

men vi har i det Følgende ingen Brug for disse Identiteter.

**) Af andre Identiteter kan nævnes:

$$|\beta u + \alpha v|^2 + |\bar{\alpha} u - \bar{\beta} v|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(|u|^2 + |v|^2),$$
$$|\beta u + \alpha v|^2 - |\bar{\beta} u - \bar{\alpha} v|^2 = 4\Re(\alpha\beta)\Re(u\bar{v}),$$
$$|\beta u + \alpha v|^2 - |\bar{\beta} u + \bar{\alpha} v|^2 = 4\Im(\alpha\beta)\Im(u\bar{v}).$$

α saaledes, at visse ubekvemme Led elimineres fra den ene Side af en Ulighed, saa at de kun forekommer paa den anden Side.

Hjælpesætning 2. Vor Identitet kan, idet R antages reel og positiv*), skrives saaledes

$$\begin{aligned} |R^2 - \bar{u}_0 u|^2 - |R(u - u_0)|^2 &= (R^2 - |u_0|^2)(R^2 - |u|^2) \\ = (R^2 - |u_0 u|^2) - R^2(|u| - |u_0|)^2 &= (R^2 + |u_0 u|)^2 - R^2(|u| + |u_0|)^2. \end{aligned}$$

Hjælpesætning 3. Af foregaaende Hjælpesætning udledes ved Betragtning af Fortegnene i øverste Linie og efter Divisjon med $|R^2 - \bar{u}_0 u|^2$ følgende tre Tilfælde:

a) For $|u_0| < R$, vil Ulighederne

$$|u| \lesseqgtr R \quad \text{og} \quad \left|\frac{R(u - u_0)}{R^2 - \bar{u}_0 u}\right| \lesseqgtr 1$$

være ækvivalente; dog fordres ved nederste Ulighedstegn $R^2 \neq \bar{u}_0 u$.

b) For $|u_0| > R$, gælder samme Sætning, naar Tegnene i den anden Ulighed vendes om; dog fordres ved øverste Ulighedstegn i første Ulighed $R^2 \neq \bar{u}_0 u$.

c) For $|u_0| = R$, er stedse

$$\left|\frac{R(u - u_0)}{R^2 - \bar{u}_0 u}\right| = 1;$$

dog maa for $|u| = R$ fordres $u \neq u_0$ (eller, hvad der her er det samme, $R^2 \neq \bar{u}_0 u$).

Hjælpesætning 4. Naar $R^2 \neq \bar{u}_0 u$, og k er et reelt, ikke negativt Tal, som tilfredsstiller Uligheden $k|u_0| < R$, vil Ulighederne

$$\left|\frac{R(u - u_0)}{R^2 - \bar{u}_0 u}\right| \lesseqgtr k \quad \text{og} \quad \left|u - \frac{R^2(1 - k^2)}{R^2 - k^2|u_0|^2} u_0\right| \lesseqgtr kR \left|\frac{R^2 - |u_0|^2}{R^2 - k^2|u_0|^2}\right|$$

være ækvivalente.

Naar $k|u_0| > R$, gælder samme Sætning, kun skal Tegnene i anden Ulighed vendes om.

Bevis. Den første Ulighed er ækvivalent med

$$|R(u - u_0)| \lesseqgtr |k(R^2 - \bar{u}_0 u)|$$

og altsaa ifølge α-Methoden med

$$|R(u - u_0) + \alpha k(R^2 - \bar{u}_0 u)| \lesseqgtr |\bar{\alpha} R(u - u_0) + k(R^2 - \bar{u}_0 u)|$$

for $|\alpha| < 1$, medens Tegnene heri skal vendes om for $|\alpha| > 1$. Ved at vælge $\alpha = k\frac{u_0}{R}$ elimineres u af højre Side, og efter Division med $|R^2 - k^2|u_0|^2| \cdot R^{-1}$, som ifølge Forudsætningerne er $\neq 0$, er Sætningen bevist.

Anm. For $k = 1$ følger heraf Hjælpesætning 3, a og b.

---

*) Som overalt i det Følgende.

Hjælpesætning 5. Naar $|u_0| < R$, $|u| < R$, vil man have

$$\frac{R\,\big||u| - |u_0|\big|}{R^2 - |u_0 u|} \leq \left|\frac{R(u - u_0)}{R^2 - \bar{u}_0 u}\right| \leq \frac{R(|u| + |u_0|)}{R^2 + |u_0 u|}.$$

Lighedstegnene indtræder da og kun da, naar mindst eet af Tallene u_0 og u er 0, eller i Uligheden tilvenstre for $\operatorname{sg}(u) = \operatorname{sg}(u_0)$, i Uligheden tilhøjre for $\operatorname{sg}(u) = -\operatorname{sg}(u_0)$.

Bevis. Ifølge Hjælpesætning 2 er hver Side af Identiteterne

$$|R^2 - \bar{u}_0 u|^2 - |R^2(u - u_0)|^2 = (R^2 - |u_0 u|)^2 - R^2(|u| - |u_0|)^2$$

og

$$\text{———»———} = (R^2 + |u_0 u|)^2 - R^2(|u| + |u_0|)^2$$

positive. Ved Division Led for Led af øverste eller nederste Identitet med respektive Ulighederne

$$|R^2 - \bar{u}_0 u|^2 \geq (R^2 - |u_0 u|)^2 \quad \text{og} \quad |R^2 - \bar{u}_0 u|^2 \leq (R^2 + |u_0 u|)^2$$

fremgaar Uligheder, som er ækvivalente med hver sin af de to, som skulde bevises. Bemærkningen om Lighedstegnene følger deraf, at de respektive Lighedstegn i de i dette Bevis benyttede Uligheder da og kun da indtræder for respektive $\operatorname{sg}(\bar{u}_0 u) = 1$ eller 0 og $-\operatorname{sg}(\bar{u}_0 u) = 1$ eller 0. —

Efter disse yderst elementære, algebraiske Hjælpesætninger*) gaar vi nu over til at bevise en funktionstheoretisk; men forinden maa vi indføre nogle Definitioner og Betegnelser, hvoraf der stedse gøres Brug i det Følgende.

Ved x og x^* forstaar vi komplekse Variable, som — naar ikke andet udtrykkeligt fastsættes — opfylder Betingelserne $|x| < R$, $|x^*| < R$. Endvidere betegner vi ved x_0 en vis Værdi af x, hvilken vi frit kan vælge med den angivne Begrænsning, altsaa $|x_0| < R$. Ved $x_1, x_2, \ldots$ betegner vi andre Værdier, som vi i et hvert enkelt Tilfælde vil definere.

Til ethvert x_ν for $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ lader vi svare et reelt, ikke negativt $\varkappa_\nu$ bestemt ved

$$\varkappa_\nu \equiv \varkappa_\nu(x) = \left|\frac{R(x - x_\nu)}{R^2 - \bar{x}_\nu x}\right|.$$

Af Hjælpesætning $3a$ følger umiddelbart, at $\varkappa_0$ stedse er < 1, og at for andre Indices $\varkappa_\nu \lesseqgtr 1$, naar $|x_\nu| \lesseqgtr R$; ved nederste Ulighedhedstegn fordres $R^2 \neq \bar{x}_\nu x$. For Kortheds Skyld betegner vi ved $\varkappa \equiv \varkappa(x)$ et Produkt af $\varkappa$'er med forskellige Indices, f. Eks. $\varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \ldots \varkappa_n$. Er alle $|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n| < R$, vil dette $\varkappa$ tilfredsstille Uligheden $0 \leq \varkappa < 1$. Naar vi anvender den anden Variabel x^*, betegner vi paa samme Maade $\varkappa_\nu^* \equiv \varkappa_\nu(x^*)$, for $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ og $\varkappa^* \equiv \varkappa(x^*)$; (Konstanterne $x_0, x_1, x_2, \ldots$ forandrer vi ikke, medmindre det udtrykkeligt fastsættes).

*) Det vil vanskeligt være undgaaet Opmærksomheden, at Hjælpesætningerne Nr. 2—5 er af homogen Form, hvilket medfører, at vi kunde have indskrænket os til at udtale dem for $R = 1$. Imidlertid følger deraf ingen som helst Fordele i det Følgende, og det er med Forsæt, at den homogene Form er valgt.

Et særligt simpelt Tilfælde indtræder, naar $\varkappa$ reduceres til $\varkappa_0$, som specielt for $x_0 = 0$ er lig med $\frac{|x|}{R}$.

Af Hjælpesætning 3a følger et vigtigt Resultat. Er alle $|x_\nu| < 1$, vil for $|x| = R$ de tilsvarende $\varkappa_\nu = 1$, og altsaa vil for $|x| \to R$, $\lim \varkappa = 1$.

Ved $y \equiv y(x)$ betegnes stedse en analytisk Funktion af x, som er regulær for $|x| < R$; for $|x| = R$ gør vi ingen Forudsætninger. Ved y^* forstaas $y(x^*)$. $y(x)$ kan naturligvis betragtes som en hel Potensrække af x, hvis Konvergensradius er $\geq R$. For Kortheds Skyld sætter vi stedse $y_0 \equiv y(x_0)$; naar $x_0 = 0$, bruger vi dog den fuldstændige Betegnelse $y(0)$ for at undgaa Misforstaaelse.

I denne Afhandling anvender vi — foruden de fremsatte algebraiske Hjælpesætninger — kun enkelte Sætninger fra den elementæreste Del af Funktionslæren, hvilke yderst simpelt, elegant og bedst (ɔ: med det mindste Maal af virkelige Forudsætninger) kan bevises ved de hele Potensrækkers Theori, saasom at en Funktion, der er en Kvotient af to regulære Funktioner, ogsaa er regulær, naar Nævneren ikke kan blive 0, alt for $|x| < R$; at Maksimum af den absolutte Værdi af en for $|x| \leq r$ regulær Funktion kun kan indtræde for et x paa $|x| = r$, o. s. v.; samt endelig

Hjælpesætning 6, Generalisation af det Schwarz'ske Lemma.

Naar Funktionen y, foruden at opfylde de ovennævnte Forudsætninger, ogsaa opfylder den, at $|y| < M$ for $|x| < R$, hvorved M er reel og positiv*), og y endvidere har Nulpunkter i $x_1, x_2, \ldots, x_n$**) indenfor det betragtede Omraade, da er

$$|y| \leq M\varkappa, \quad \text{hvor} \quad \varkappa = \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n.$$

Denne Løsning er af 1ste Klasse; thi af Uligheden følger a fortiori $|y| < M$, og for $\varkappa = 0$ (ɔ: $x = x_1, x_2, \ldots$ eller x_n) følger, at $y = 0$ for de angivne Værdier af x.

Bevis. Ifølge Forudsætningerne er Funktionen

$$\frac{y}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}$$

og derfor ogsaa

$$u = y \frac{(R^2 - \bar{x}_1 x)(R^2 - \bar{x}_2 x) \ldots (R^2 - \bar{x}_n x)}{R(x - x_1) \cdot R(x - x_2) \ldots R(x - x_n)}$$

regulære Funktioner for $|x| < R$, og man har

$$|u| = \frac{|y|}{\varkappa} < \frac{M}{\varkappa}.$$

*) Som overalt i det Følgende.

**) Intet x_ν maa forekomme oftere, end den tilsvarende Multiplicitet af det paagældende Nulpunkt angiver. Denne Fordring tænkes stedse opfyldt i det Følgende, uden at det hver Gang udtrykkeligt behøver at anføres.

Vi kan nu ifølge en ovenfor gjort Bemærkning (S. 13) vælge et $|x| = r < R$, saa nær ved R, at $r > |x_\nu|$, for $\nu = 1, 2, \ldots, n$, og at $\varkappa > \frac{1}{1+\varepsilon}$, hvor ε er en forud valgt positiv Størrelse, og vi har da paa Cirklen $|x| = r$

$$|u| < M(1+\varepsilon).$$

Ifølge en ovenfor anført Sætning af den elementære Funktionslære gælder imidlertid den sidste Ulighed for alle $|x| \leqq r$, og da ε var valgt vilkaarlig, har vi for $|x| \leqq r < M$ ogsaa $|u| \leqq M$, eller $|y| \leqq M\varkappa$, hvilket skulde bevises.

Anm. Det er let at se, at Lighedstegnet kan indtræde i et vist Tilfælde (foruden altid, naar $x = x_1, x_2, \ldots$ eller x_n, i hvilket Tilfælde begge Sider $= 0$). Lad os f. Eks. vælge

$$y = \gamma M \prod_{\nu=1}^{n} \frac{R(x - x_\nu)}{R^2 - \bar{x}_\nu x}, \quad *)$$

hvor γ er en Konstant, som tilfredsstiller Betingelsen $|\gamma| = 1$, og $|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n| < R$, da er øjensynligt y regulær for $|x| < R$, og man har $|y| = M\varkappa < M$. Da $\varkappa \to 1$, for $|x| \to R$, vil ogsaa $|y| \to M$.

Inden vi gaar over til at anvende de i denne § beviste Hjælpesætninger, vil vi et Øjeblik betragte den sidste, idet vi skriver den mere udførligt:

Naar $y(x)$ er regulær og $|y(x)| < M$ for $|x| < R$, samt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er nogle af Funktionens Nulpunkter i det givne Omraade, vil

$$M \geqq \left| y(x) \cdot \frac{R^2 - \bar{x}_1 x}{R(x - x_1)} \cdot \frac{R^2 - \bar{x}_2 x}{R(x - x_2)} \cdot \frac{R^2 - \bar{x}_n x}{R(x - x_n)} \right|.$$

Hvis $y(x)$ imidlertid er regulær for et større Omraade, nemlig for $|x| < R' > R$, da kan vi (ifølge Hjælpesætningerne 3 c, 3 b og 3 a) blandt de i højre Side forekommende x_ν a fortiori (de tilsvarende Faktorer $\frac{1}{\varkappa_\nu}$ er $\leqq 1$, saalænge $|x| < R$) optage et vilkaarligt Antal andre x_ν, som ligger ganske vilkaarligt i det udvidede Omraade udenfor det oprindelige, (og da $|x|$ stadig antages $< R$, er det overflødigt at tilføje den indskrænkende Betingelse $x \neq x_\nu$ for disse nye x_ν). Naturligvis staar det os frit for at lade disse x_ν falde i Nulpunkter af $y(x)$ i det nye Omraade, hvis saadanne findes.

Med denne Udvidelse af Hjælpesætning 6 omfatter den for $x = 0$ min ovenfor under § 1, 3⁰ citerede Sætning, saa vel som Carathéodory og Féjer's Resultater i den [8]) citerede Afhandling.

Hjælpesætning 6 kan ogsaa udvides paa en anden Maade. Det er ingen væsentlig ny Opgave, dersom vi — stadig med de samme Forudsætninger for y — i Stedet

---

*) Naar $x_1, \ldots x_n$ er alle Nulpunkter af y i $|x| < R$, vil dette være den eneste regulære Funktion af x, som opfylder Betingelsen $|y| = M\varkappa$. Da vi ingen Brug har herfor i det Følgende, skal vi ikke ophold os med at vise dette.

for Nulpunkter af y betragter Nulpunkter af $y - \eta$, hvor η er en vilkaarlig valgt Konstant, som dog tilfredsstiller Betingelsen $|\eta| < M$. Man behøver blot i Stedet for y at betragte Funktionen

$$\frac{M(y-\eta)}{M^2 - \bar{\eta} y}.$$

Denne Funktion er nemlig regulær, fordi Nævneren ifølge Forudsætningerne er absolut > 0, og ifølge Hjælpesætning 3 a er Funktionen absolut < 1. Vi kan altsaa anvende Hjælpesætning 6 derpaa og finder saaledes følgende mere almindelige Form for denne:

Er y en regulær Funktion af x og $|y| < M$, alt for $|x| < R$, samt x_1, $x_2, \ldots x_n$ nogle af Nulpunkterne af Funktionen $y - \eta$, hvor η er en Konstant, hvis absolutte Værdi er $< M$*), vil

$$M|y-\eta| \leqq |M^2 - \bar{\eta} y| \varkappa,$$

hvor

$$\varkappa = \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n.$$

For $\eta = 0$ har vi atter Hjælpesætning 6. Hvad ovenfor er sagt angaaende Udvidelse af den sidstnævnte Sætning, gælder naturligvis mutatis mutandis for vor sidste Omformning heraf.

Af $\varkappa = 0$, følger $y(x_\nu) = \eta$, for $\nu = 1, 2, \ldots n$, og af Sætningen følger a fortiori $M|y-\eta| < |M^2 - \bar{\eta} y|$, eller (ifølge Hjælpesætning 3 a) $|y| < M$. Theoremet er altsaa af 1ste Klasse.

For $x = 0$ haves det under [9]) (S. 107) citerede Resultat af Landau; se ovenfor S. 7.

---

§ 3. Almindelige Sætninger, vedrørende Funktioner ved Begrænsning af deres absolutte Værdi.

Foruden de i § 2 (S. 13) indførte Betegnelser og Definitioner forudsætter vi overalt i denne §, at $|y| < M$ for $|x| < R$, naar ikke andet udtrykkeligt fastsættes.

Theorem 1. Naar x_0 vælges vilkaarligt**) indenfor Omraadet, og x_0, $x_1, \ldots x_n$ i dette betegner nogle af Nulpunkterne af $y - y_0$ (specielt ingen af dem med Undtagelse af x_0), vil ækvivalent følgende tre Uligheder være gældende:

I. $$M|y - y_0| \leqq |M^2 - \bar{y}_0 y| \varkappa;$$

II. $$|y - y_0|^2 \leqq \frac{(M^2 - |y_0|^2)(M^2 - |y|^2)}{M^2} \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2};$$

*) Hvis $|\eta| \geqq M$, har $y - \eta$ ingen Nulpunkter i det betragtede Omraade.

**) I Anvendelserne er det naturligvis fordelagtigst at vælge x_0 saaledes, at $y_0 \equiv y(x_0)$ har en bekvem Værdi.

III. $$\left| y - y_0 \frac{M^2(1-\varkappa^2)}{M^2 - |y_0|^2 \varkappa^2} \right| \leq M \frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2 \varkappa^2} \varkappa;$$

heri er
$$\varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \ldots \varkappa_n.$$

Theoremet er af 1ste Klasse, ɔ: alle Forudsætningerne følger igen af hver især af Ulighederne I, II eller III, saafremt der gives et x_0, for hvilket $|y_0| < M$.

Bevis. Ifølge Forudsætningerne har Funktionen $y - y_0$ Nulpunkter for $x = x_0$, $x_1, \ldots x_n$, og I er saaledes en umiddelbar Følge af Hjælpesætning 6 i den almindeligere Form, vi har givet i Slutningen af § 2. Antages omvendt Ulighed I at være gældende, da er $y = y_0$ for $\varkappa = 0$, og af I følger a fortiori $M|y - y_0| < |M^2 - \bar{y}_0 y|$. Gives der nu et x_0 for hvilket $|y_0| < M$, da er ifølge Hjælpesætning 3 a ogsaa $|y| < M$, og I er saaledes af 1ste Klasse.

Ved Kvadrering af begge Sider af I og med Benyttelse af Identiteten i Hjælpesætning 2 følger ækvivalent

$$M^2 |y - y_0|^2 \leq |M^2 - \bar{y}_0 y|^2 \varkappa^2 = \left(M^2 |y - y_0|^2 + (M^2 - |y_0|^2)(M^2 - |y|^2)\right) \varkappa^2,$$

som atter er ækvivalent med II.

Anvender vi Hjælpesætning 4 paa I (med y for u, y_0 for u_0, M for R, $\varkappa$ for k), har vi, idet $|y_0| \varkappa < |y_0| < M$, at III er ækvivalent med I.

Hermed er Theorem 1 fuldstændigt bevist.

Anm. 1. I og II er ogsaa gældende under Forudsætningerne $|y| > M$, $|y_0| > M$, hvad man umiddelbart ser ved at tage $\frac{1}{y}$ for y, $\frac{1}{M}$ for M; eller ogsaa ved Hjælpesætning 3 b.

Anm. 2. Lighedstegnet indtræder i I, II og III altid for de særlige Værdier af $x = x_0, x_1, \ldots$ eller x_n. Ifølge Anmærkningen til Hjælpesætning 6 indtræder det for en hver Værdi af x i det givne Omraade, naar

$$y = M \frac{y_0 + \gamma M R^{n+1} \prod_{\nu=0}^{n} \frac{x - x_\nu}{R^2 - \bar{x}_\nu x}}{M + \gamma \bar{y}_0 R^{n+1} \prod_{\nu=0}^{n} \frac{x - x_\nu}{R^2 - \bar{x}_\nu x}},$$

hvor $|y_0| < M$ og $|\gamma| = 1$.

Anm. 3. For $y_0 = 0$ reducerer I, II og III sig til Hjælpesætning 6.

Theorem 2. Under samme Forudsætninger som i Theorem 1 er

(a) $$|y - y_0| \leq \frac{M^2 - |y_0|^2}{M - |y_0| \varkappa} \varkappa;$$

(b) $$|y - y_0| \leq (M + |y_0| \varkappa) \varkappa;$$

(c) $$|y - y_0| \leq \sqrt{M^2 - |y_0|^2} \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - \varkappa^2}}.$$

Bevis. (a) følger af Theorem 1, I ved at erstatte $|M^2 - \bar{y}_0 y| = |M^2 - |y_0|^2 - \bar{y}_0(y-y_0)|$ a fortiori med $M^2 - |y_0|^2 + |y_0|\,|y-y_0|$. (b) følger a fortiori af (a), (c) a fortiori af Theorem 1, II.

Anm. 1. Naar der existerer et x_0, for hvilket $y_0 = 0$, er (a) eller (b) øjensynlig af 1ste Klasse.

Anm. 2. For $\varkappa = \varkappa_0 = \dfrac{R\,|x - x_0|}{|R^2 - \bar{x}_0 x|}$ har vi let ved af (a), (b) eller (c) at finde højere Grænser for den absolutte Værdi af Differenskvotienten $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$. Den første af disse fører for $x \to x_0$ til Lindelöf's Formel (efter Ombytning af x_0 med x)

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq \frac{R}{M}\frac{(M^2 - |y|^2)}{(R^2 - |x|^2)}.\text{*)}$$

Vi skal i det Følgende komme tilbage hertil under almindeligere (og bedre) Former.

Theorem 3. Under samme Forudsætninger som i Theorem 1 og, idet η er en Konstant, er

$$\left|\eta - y_0\frac{M^2(1-\varkappa^2)}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\right| - M\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\varkappa \leq |y - \eta| \leq \left|\eta - y_0\frac{M^2(1-\varkappa^2)}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\right| + M\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\varkappa.$$

Beviset for de to Uligheder følger ved i Theorem 1, III a fortiori at erstatte venstre Side med respektive

$$\left|\eta - y_0\frac{M^2(1-\varkappa^2)}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\right| - |y-\eta| \quad \text{eller} \quad |y-\eta| - \left|\eta - y_0\frac{M^2(1-\varkappa^2)}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}\right|.$$

Anm. 1. For $\varkappa = 0$ reducerer de to Uligheder sig til Identiteterne $|y(x_\nu) - \eta| = |y_0 - \eta|$.

Anm. 2. For $\eta = y_0$ reducerer højre Ulighed sig til Theorem 2, (a).

Korollar 1. Naar $\eta = 0$, antager Theorem 3 følgende Form (efter simpel Sammendragning paa højre og venstre Side)

$$M\frac{|y_0| - M\varkappa}{M - |y_0|\varkappa} \leq |y| \leq M\frac{|y_0| + M\varkappa}{M + |y_0|\varkappa}.$$

(Inden vi gaar videre, vil vi bevise dette Korollar paa en anden Maade ved Hjælpesætning 5, venstre Ulighed. Ifølge Forudsætningerne er

$$\left|\frac{M(y-y_0)}{M^2 - \bar{y}_0 y}\right| \leq \varkappa,$$

eller a fortiori

$$\frac{M(|y_0| - |y|)}{M^2 - |y_0 y|} \leq \varkappa \quad \text{og} \quad \frac{M(|y| - |y_0|)}{M^2 - |y_0 y|} \leq \varkappa,$$

hvoraf de to Uligheder, som skulde bevises, følger ækvivalent ved Opløsning med Hensyn til $|y|$).

*) Se ovenfor S. 8.

Iøvrigt bemærkes følgende. Naar der eksisterer et x_0, saa at $y_0 = 0$, reducerer Uligheden paa højre Side sig (for denne Værdi af x_0) til Hjælpesætning 6, det generaliserede Schwarz'ske Lemma, og da er den af 1ste Klasse. Forøvrigt er altid

$$M\frac{|y_0| + M\varkappa}{M + |y_0|\varkappa} = M\left(1 - \frac{(M - |y_0|)(1 - \varkappa)}{M + |y_0|\varkappa}\right) < M, \text{ for } |y_0| < M.$$

Af specielle Tilfælde maa vi mærke $\varkappa = \varkappa_0$*), eller

$$M\frac{|y_0|\,|R^2 - \bar{x}_0 x| - MR|x - x_0|}{M|R^2 - \bar{x}_0 x| - R|y_0(x - x_0)|} \leq |y| \leq M\frac{|y_0|\,|R^2 - \bar{x}_0 x| + MR|x - x_0|}{M|R^2 - \bar{x}_0 x| + R|y_0(x - x_0)|},$$

som for $x_0 = 0$ (og $y_0 = y(0)$) reducerer sig til to Formler af Lindelöf (l. c. [11]), Formel (4), S. 12**), og Formel (1), S. 11, smlgn. ovenfor S. 8).

Af Korollar 1 følger

Korollar 2.

$$M^2\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}(1 - \varkappa)^2 \leq M^2 - |y|^2 \leq M^2\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2\varkappa^2}(1 + \varkappa)^2.$$

Bevis. Korollar 1 kan skrives

$$M\frac{M + |y_0|}{M - |y_0|\varkappa}(1 - \varkappa) \leq M + |y| \leq M\frac{M + |y_0|}{M + |y_0|\varkappa}(1 + \varkappa)$$

og

$$M\frac{M - |y_0|}{M + |y_0|\varkappa}(1 - \varkappa) \leq M - |y| \leq M\frac{M - |y_0|}{M - |y_0|\varkappa}(1 - \varkappa),$$

hvoraf Korollar 2 følger ved Multiplikation Led for Led.

Vi vil i det Følgende faa Lejlighed til at anvende højre Ulighed i dette Korollar; men vi maa udtrykkeligt bemærke, at denne ikke er fordelagtig at anvende, med mindre $\varkappa$ har en saadan Værdi, at 3dje Led er $< M^2$; Uligheden er ellers trivial, og det er da bedre simpelthen at tage M^2. Da vi for 3dje Led a fortiori kan sætte

$$M^2\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2(1 - \varkappa^2)}(1 + \varkappa)^2 = (M^2 - |y_0|^2)\frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa},$$

viser dette, at Formlen er fordelagtig, naar $\varkappa < \dfrac{|y_0|^2}{2M^2 - |y_0|^2}$ eller i hvert Fald for $\varkappa < \dfrac{1}{2}\dfrac{|y_0|^2}{M^2}$.

Korollar 3. Naar $0 < M' < |y| < M$, er

$$M'\frac{|y_0| + M'\varkappa}{M' + |y_0|\varkappa} \leq |y| \leq M\frac{|y_0| + M\varkappa}{M + |y_0|\varkappa}.$$

Bevis. Kun Uligheden tilvenstre behøver et Bevis, og dette følger umiddelbart af den allerede i Korollar 1 beviste Ulighed til højre, naar man anvender denne paa Funktionen $\dfrac{1}{y}$ og erstatter y_0 og M med $\dfrac{1}{y_0}$ og $\dfrac{1}{M'}$.

*) Hvor vi altsaa ingen Forudsætninger gør om Eksistensen af Rødderne $x_1, x_2, \ldots$

**) Dog uden en overflødig indskrænkende Betingelse.

Theorem 4. Under de samme Forudsætninger som i Theorem 1, og idet $\eta (\neq y_0)$ er en Konstant, hvis absolutte Værdi $< M$*), vil

$$y \neq \eta \quad \text{for} \quad x = x_0 x_1 \ldots x_n < \left| \frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0} \right|.$$

Bevis. $y \neq \eta$, naar 1ste Led i Uligheden i Theorem 3 er positiv, eller naar

$$\left| \eta - y_0 \frac{M^2(1 - x^2)}{M^2 - |y_0|^2 x^2} \right| > M \frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2 x^2} x.$$

Ifølge Hjælpesætning 4 (med x for k, M for R, η for u, y_0 for u_0, og idet som Følge af Forudsætningerne $M^2 \neq \bar{y}_0 \eta$, $x|y_0| < M$) vil denne Ulighed være ækvivalent med

$$\left| \frac{M(\eta - y_0)}{M^2 - \bar{y}_0 \eta} \right| = \left| \frac{M(\eta - y_0)}{M^2 - \bar{\eta} y_0} \right| > x,$$

hvilket skulde bevises.

Et andet Bevis følger ved at anvende venstre Side af Korollar 1, Theorem 3, paa Funktionen

$$\frac{M(y - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y},$$

der — som vi har set — er absolut < 1 og endvidere for $x = x_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ antager Værdien

$$\frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0},$$

hvorfor

$$\left| \frac{M(y - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y} \right| \geq \frac{\left| \frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0} \right| - x}{1 - \left| \frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0} \right| x}.$$

Anm. Det er umiddelbart indlysende, at jo flere Faktorer man kan medtage i x i venstre Side af Uligheden i Theorem 4, des større Omraade bestemmes derved for x. Sætningen er altsaa af størst Betydning, naar vi kender saa mange som muligt af Nulpunkterne i $y - y_0$; men vi kan i alle Tilfælde tage $x = x_0$, og har da

Korollar 1.

$$y \neq \eta, \text{ naar } x_0 = \left| \frac{R(x - x_0)}{R^2 - \bar{x}_0 x} \right| < \left| \frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0} \right|.$$

Som specielt Tilfælde mærkes $x_0 = 0$ $\big($og $y_0 = y(0)\big)$, hvilket giver os det ovenfor S. 7 anførte Resultat af LANDAU (l. c. [9]), S. 105).

Som et andet specielt Tilfælde mærkes $\eta = 0$, som giver

$$y \neq 0, \text{ naar } \left| \frac{R(x - x_0)}{R^2 - \bar{x}_0 x} \right| < \frac{|y_0|}{M}.$$

*) For $|\eta| \geq M$ vil $y \neq \eta$ i hele Omraadet $|x| < R$.

Heraf følger a fortiori, idet $|R^2 - \bar{x}_0 x| = |R^2 - |x_0|^2 - \bar{x}_0 (x - x_0)|$ erstattes med $R^2 - |x_0|^2 - |x_0|\,|x - x_0|$, LINDELÖF's Resultat (l. c. [11]) (5), S. 12):

$$y \neq 0, \text{ naar } |x - x_0| < \frac{RM + |x_0 y_0|}{R^2 - |x_0|^2}\,|y_0|.$$

Korollar 2. Det foregaaende Korollar kan ækvivalent omformes til følgende:

$$y \neq \eta, \text{ naar } \left| x - x_0 \frac{R^2(|M^2 - \bar{\eta} y_0|^2 - M^2 |y_0 - \eta|^2)}{R^2 |M^2 - \bar{\eta} y_0|^2 - M^2 |x_0 (y_0 - \eta)|^2} \right| < \frac{RM(R^2 - |x_0|^2)\,|M^2 - \bar{\eta} y_0|\,|y_0 - \eta|}{R^2 |M^2 - \bar{\eta} y_0|^2 - M^2 |x_2 (y_0 - \eta)|^2},$$

og specielt

$$y \neq 0, \text{ naar } \left| x - x_0 \frac{R^2 (M^2 - |y_0|^2)}{R^2 M^2 - |x_0 y_0|^2} \right| < \frac{RM(R^2 - |x_0|^2)\,|y_0|}{R^2 M^2 - |x_0 y_0|^2}.$$

Det sidste Omraade er til alle Sider større end det af LINDELÖF angivne, som vi nys har anført.

Beviset følger ved at anvende Hjælpesætning 4 til Omformning af Korollar 1 $\left(\text{med } \left|\frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0}\right| \text{ for } k,\ x \text{ for } u,\ x_0 \text{ for } u_0, \text{ idet } |x_0| \left|\frac{M(y_0 - \eta)}{M^2 - \bar{\eta} y_0}\right| < |x_0| < R\right)$.

Anvender vi Identiteten i Hjælpesætning 2, har vi ogsaa

$$y \neq \eta, \text{ naar } \left| x - x_0 \frac{R^2 (M^2 - |\eta|^2)(M^2 - |y_0|^2)}{R^2 (M^2 - |\eta|^2)(M^2 - |y_0|^2) + M^2 |y_0 - \eta|^2 (R^2 - |x_0|^2)} \right|$$
$$< \frac{RM(R^2 - |x_0|^2)\,|M^2 - \bar{\eta} y_0|\,|y_0 - \eta|}{R^2 (M^2 - |\eta|^2)(M^2 - |y_0|^2) + M^2 |y_0 - \eta|^2 (R^2 - |x_0|^2)}.$$

Theorem 5 angaaende Differentialkvotienten af y.

Under samme Forudsætninger som i Theorem 1 er

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq \frac{R(M^2 - |y|^2)}{M(R^2 - |x|^2)} \leq \frac{RM}{R^2 - |x|^2}\,\frac{M^2 - |y_0|^2}{M^2 - |y_0|^2 \varkappa^2}\,(1 + \varkappa)^2. \text{ *)}$$

Bevis. Som vi allerede før har bemærket, er den første Ulighed, Lindelöf's Formel, en umiddelbar Følge af Theorem 1, I eller II, naar man tager $\varkappa = \varkappa_0$ og lader $x_0 \to x$. Den anden Ulighed er en Følge af Theorem 3, Korollar 2, Uligheden tilhøjre.

Anm. 1. Den Ulighed, som dannes a fortiori ved Udeladelse af mellemste Led, kan i en vis Forstand kaldes mere omfattende end Lindelöf's Formel, da denne fremgaar af den førstnævnte for $x_0 = x$. Endvidere indeholder 3dje Led ikke y men y_0, som maa anses for bekendt. Iøvrigt maa bemærkes, at Lighedstegnet i

---

*) I Stedet for den første Ulighed kan man a fortiori sætte

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq \frac{RM}{R^2 - |x|^2}.$$

Ved man, at $|y|$ ogsaa er $> M' > 0$ i det betragtede Omraade, har man den nøjagtigere Formel

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < \frac{R(M^2 - M'^2)}{M(R^2 - |x|^2)}.$$

Lindeløf's Formel ikke kan undværes, da det — hvilket vi overlader til Læseren at verificere — indtræder for $y = \gamma \dfrac{M}{R} x$, $|\gamma| = 1$.*) Lighedstegnet tilhøjre kan heller ikke undværes, da det indtræder for $x = 0$, altsaa f. Eks. for $x_0 = x$.

Anm. 2. Vi har forhen bemærket (se ovenfor S. 8), at Lindelöf's Formel for $x = 0$ indeholder en tidligere Formel af Landau, der, idet y skrives som en hel Potensrække af x:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x + \ldots,$$

hvis Konvergensradius er $\geqq R$, kan skrives saaledes:

$$RM|c_1| \leqq M^2 - |c_0|^2.\text{**)}$$

Det er let at give dette Resultat en mere almindelig Form. Lad p og q være hele Tal, $q > p \geqq 0$ og θ en primitiv q^{te} Rod af Enheden, da er

$$\frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{q} \theta^{-p\nu} y(x\theta^{\nu}) = x^p (c_p + c_{p+q} x^q + c_{p+2q} x^{2q} + \ldots),$$

hvor venstre Side er absolut $< M$, og Rækken i Parenthesen paa højre Side, betragtet som hel Potensrække af x^q, i det mindste konvergerer for $|x^q| < R^q$. Betragter vi alle Værdier af x for $|x| = r < R$, vil for disse Værdier Rækken i Parenthesen være absolut $< \dfrac{M}{r^p}$, hvilket vil gælde for alle $|x| < r$. Da nu r kan tages saa nær ved R, som vi ønsker, vil saaledes den absolutte Værdi af Rækken være $\leqq \dfrac{M}{R^p}$. Ifølge Landau's Sætning er derfor

$$R^q \frac{M}{R^p} |c_{p+q}| \leqq \frac{M^2}{R^{2p}} - |c_p|^2,$$

eller

$$R^{p+q} M |c_{p+q}| \leqq M^2 - R^{2p} |c_p|^2,$$

som er den Relation, vi vilde bevise***).

---

*) Og mere almindeligt for $y = M \dfrac{y_0(R^2 - \bar{x}_0 x) + \gamma MR(x - x_0)}{M(R^2 - \bar{x}_0 x) + \gamma \bar{y}_0 R(x - x_0)}$, hvor Konstanterne x_0 og y_0 opfylder Betingelserne $|x_0| < R$, $|y_0| < M$.

**) At Landau (l. c. [2]) kun beviser denne Formel for $R = 1$, $M = 1$, er naturligvis ingen Indskrænkning. Iøvrigt kan man endogsaa af Landau's Formel ved en lineær Substitution atter udlede den almindeligere Lindeløf'ske. Sætter man nemlig

$$y(x) = f\left(\frac{R^2(x + x_0)}{R^2 + \bar{x}_0 x}\right),$$

saa er (ifølge Hjælpesætning 3 a) $|f(x)| < M$ for $|x| < R$, medens $f(x)$ ses at være regulær i dette Omraade. Formlen

$$RM|y'(0)| \leqq M^2 - |y(0)|^2$$

bliver til

$$\frac{M}{R} |f'(x_0)| (R^2 - |x_0|^2) \leqq M^2 - |f(x_0)|^2,$$

som ved Ombytning af $f(x)$ med $y(x)$ og x_0 med x giver Lindeløf's Formel.

***) Det er let at generalisere dette Resultat betydeligt. Imidlertid vilde dette ganske falde udenfor denne Afhandlings Rammer, og jeg maa derfor forbeholde mig ved en anden Lejlighed at komme tilbage hertil.

For $p = 0$ fremgaar som specielt Tilfælde WIENER's ovenanførte (se S. 7) Udvidelse af Landau's Sætning.

Theorem 6 angaaende Differenskvotienten af y.

Under de samme Forudsætninger som i Theorem 1 er for $x \neq x^*$

$$\left|\frac{y-y^*}{x-x^*}\right|^2 \leq \frac{R^2(M^2-|y|^2)(M^2-|y^*|^2)}{M^2(R^2-|x|^2)(R^2-|x^*|^2)}, \text{ *)}$$

idet x^* er en ny uafhængig variabel, og $y^* \equiv y(x^*)$.

Naar omvendt denne Ulighed er opfyldt, og der eksisterer en vis Værdi af x, for hvilken $|y| < M$, vil $|y| < M$ for alle x.

Bevis. Naar vi i Theorem 1, II tager $\varkappa = \varkappa_0 = \dfrac{R^2|x-x_0|}{|R^2-\bar{x}_0 x|}$ og erstatter x_0 med x^*, har vi

$$\left|\frac{y-y^*}{x-x^*}\right|^2 \leq \frac{R^2(M^2-|y|^2)(M^2-|y^*|^2)}{M^2(|R^2-\bar{x}^*x|^2-R^2|x-x^*|^2)},$$

hvilket ifølge Identiteten i Hjælpesætning 2 netop er den Ulighed, vi skulde bevise. Eksisterer der en vis Værdi af x^*, for hvilken $|y^*| < M$, har vi omvendt ifølge Theorem 1, at Uligheden i Theorem 6 er ækvivalent med

$$\left|\frac{M(y-y^*)}{M^2-\bar{y}^*y}\right| \leq \left|\frac{R(x-x^*)}{R^2-\bar{x}^*x}\right|,$$

hvoraf a fortiori

$$\left|\frac{M(y-y^*)}{M^2-\bar{y}^*y}\right| < 1,$$

hvilken Ulighed er ækvivalent med $|y| < M$ ifølge Hjælpesætning 3 a.

Hermed er Theorem 6 fuldstændigt bevist.

Anm. 1. Ifølge Anm. 1 til Theorem 1 ser man let, at dersom der findes en vis Værdi af x^*, for hvilken $|y^*| > M$, vil Gyldigheden af Uligheden i Theorem 6 ogsaa medføre, at $|y| > M$ for alle Værdier af x i det betragtede Omraade.

Anm. 2. Naar vi ønsker, at der i højre Side af Uligheden i Theorem 6 ikke skal forekomme y eller y^*, kan vi ligesom ovenfor ved Hjælp af Korollar 2 til Teorem 3 eliminere den ene, den anden eller begge disse Funktioner, saa at der i Stedet herfor kun indgaar et y_0, som vi hellere ønsker. Vi erstatter altsaa a fortiori

$$M^2-|y|^2 \quad \text{med} \quad M^2\frac{M^2-|y_0|^2}{M^2-|y_0|^2\varkappa^2}(1+\varkappa)^2$$

og

$$M^2-|y^*|^2 \quad \text{med} \quad M^2\frac{M^2-|y_0|^2}{M^2-|y_0|^2\varkappa^{*2}}(1+\varkappa^*)^2, \text{ hvor } \varkappa^* \equiv \varkappa(x^*).$$

---

*) Heraf følger a fortiori den simple Formel

$$\left|\frac{y-y^*}{x-x^*}\right| \leq \frac{RM}{\sqrt{(R^2-|x|^2)(R^2-|x^*|^2)}}.$$

Hvis man ved, at $|y|$ ogsaa er $> M' > 0$ i det betragtede Omraade, vil man have den nøjagtigere Formel

$$\left|\frac{y-y^*}{x-x^*}\right| < \frac{R(M^2-M'^2)}{M\sqrt{(R^2-|x|^2)(R^2-|x^*|^2)}}.$$

Dette kan naturligvis varieres paa mange Maader, f. Eks. saaledes, at man for x sætter x_0, og for x^* sætter x_0^* med samtidig Forandring af x_0 til x_0^*, og altsaa i nederste Udtryk $y(x_0^*)$ for y_0. Den herved fremkomne Formel er — uden Forudsætninger om $x_1, x_2, \ldots$ — meget omfattende. For $x_0 = x$ og $x_0^* = x^*$ genfindes naturligvis Theorem 6.

Det anførte vil sikkert være tilstrækkeligt til at vise, hvorledes man i andre Tilfælde ved Begrænsning af $|y|$ opad eller nedad kan gaa frem.

En almindelig Bemærkning vil maaske endnu være paa sin Plads. Lad os antage, at vi under Betingelserne for Theorem 1, (nemlig $|y| < M$ for $|x| < R$, $|x_0| < R$ og $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nogle af Nulpunkterne af $y - y_0$ indenfor det givne Omraade for x), har fundet et (ikke analytisk) Udtryk i $y, y_0, M, x, x_0, x_1, \ldots, x_n, R$, som tilfredsstiller Betingelsen

$$\text{(I)} \qquad U\left(\frac{y}{M}, \frac{y_0}{M}\right) \geqq 0.$$

Da $|y| < M$, for η konstant og $|\eta| < M$, er ækvivalent med $\left|\frac{M(y-\eta)}{M^2-\bar{\eta}y}\right| < 1$, og $\frac{M(y-\eta)}{M^2-\bar{\eta}y}$ for $x = x_0, x_1, \ldots x_n$ antager Værdien $\frac{M(y_0-\eta)}{M^2-\bar{\eta}y_0}$, vil den almindeligere Formel

$$\text{(II)} \qquad U\left(\frac{M(y-\eta)}{M^2-\bar{\eta}y}, \frac{M(y_0-\eta)}{M^2-\bar{\eta}y_0}\right) \geqq 0$$

være udledt af (I), som atter fremgaar af (II) ved at sætte $\eta = 0$. Sætter man derimod $\eta = y_0$, finder man den simplificerede Form

$$U\left(\frac{M(y-y_0)}{M^2-\bar{y}_0 y}, 0\right) \geqq 0.$$

Dette kan varieres paa mange Maader. Vi kan, som vi jo allerede har set Eksempler paa, for η tage en Funktion af en anden uafhængig Variabel x^*, nemlig $\eta = y(x^*)$, navnlig naar vi ser bort fra $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Skønt de i næste § følgende Theoremer om $\Re(y)$ og dennes Begrænsning i Virkeligheden er mer eller mindre direkte Korollarer til, hvad der er udviklet i nærværende §, naar man benytter sig af de i Begyndelsen af § 2 givne Formler for Sammenhængen imellem „absolut Værdi“, „reel Del“ o. s. v., saa er Detaillerne herved dog af saa stor Interesse, at vi udførligt maa gaa ind paa de herhenhørende Theoremer.

---

§ 4. Almindelige Sætninger, vedrørende Funktioner ved Begrænsning af deres reelle Del.

Foruden de i § 2 indførte Betegnelser og Definitioner forudsætter vi overalt i denne §, naar ikke andet udtrykkelig fastsættes, at $\Re(y) < A$ for $|x| < R$, hvor A betegner et reelt Tal.

Theorem 1. Naar x_0 vælges vilkaarligt i Omraadet $|x| < R$, og i dette $x_0, x_1, \ldots x_n$ betegner nogle af Nulpunkterne af Funktionen $y - y_0$ (specielt ingen af dem med Undtagelse af x_0), vil ækvivalent følgende tre Uligheder være gældende:

I. $$|y - y_0| \leqq |y - y_0 - 2(A - \Re y_0)|\,\varkappa;$$

II. $$|y - y_0|^2 \leqq 4(A - \Re y_0)(A - \Re y)\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2};\,^{*)}$$

III. $$\left|y - y_0 + 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\right| \leqq 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2};$$

heri er $\varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \ldots \varkappa_n$.

Theoremet er af 1ste Klasse, ɔ: alle Forudsætningerne kan igen udledes af hver især af Ulighederne I, II eller III, saafremt der gives et x_0, for hvilket $\Re(y_0) < A$.

Bevis. Vi sætter for Kortheds Skyld (ligesom i de øvrige Beviser i det Følgende)

$$a = A - \Re(y), \quad a_0 = A - \Re(y_0).$$

Da er $a > 0$, $a_0 > 0$, og $\Re(y - y_0) = a_0 - a < a_0$, hvoraf ækvivalent hermed

$$4a_0\Re(y - y_0) < 4a_0^2, \quad |y - y_0|^2 < |y - y_0|^2 - 4a_0\Re(y - y_0) + 4a_0^2 = |y - y_0 - 2a_0|^2,$$

ifølge den første Identitet i § 2 (se S. 10).

Altsaa er, idet $\Re(y - y_0 - 2a_0) < -a_0 < 0$,

$$\frac{y - y_0}{y - y_0 - 2a_0}$$

en regulær Funktion af x i det givne Omraade; endvidere er den absolut < 1 og har Nulpunkterne x_0, og $x_1, x_2, \ldots x_n$, hvis disse sidste findes. Ifølge Hjælpesætning 6 er altsaa

$$\left|\frac{y - y_0}{y - y_0 - 2a_0}\right| \leqq \varkappa, \quad \varkappa = \varkappa_0\varkappa_1 \ldots \varkappa_n,$$

ækvivalent med I. Antages omvendt, at Ulighed I er gældende, og der gives et x_0, for hvilket $\Re(y_0) < A$, haves $y = y_0$ for $\varkappa = 0$, og a fortiori er $|y - y_0| < |y - y_0 - 2a_0|$, hvilket, efter hvad vi nys har set, er ækvivalent med $\Re(y - y_0) < a_0$ eller $\Re(y) < A$; I er saaledes af 1ste Klasse.

*) Eller $$\varkappa^2 \geqq \frac{|y - y_0|^2}{|y - y_0|^2 + 4(A - \Re y_0)(A - \Re y)}.$$

Af I følger ækvivalent ved Kvadrering

$$|y - y_0|^2 \leqq (|y - y_0|^2 - 4a_0\Re(y - y_0) + 4a_0^2)\varkappa^2 = |y - y_0|^2\varkappa^2 + 4a_0 a\,\varkappa^2,$$

hvilket er ækvivalent med II.

III kan ogsaa bevises ved Kvadrering; men vi foretrækker α-Methoden. For $|\alpha| < 1$ er I ækvivalent med

$$|y - y_0 + \alpha(y - y_0 - 2a_0)\varkappa| \leqq |\bar{\alpha}(y - y_0) + (y - y_0 - 2a_0)\varkappa|,$$

der for $\alpha = \bar{\alpha} = -\varkappa$, (som opfylder Betingelsen), er ækvivalent med

$$|(y - y_0)(1 - \varkappa^2) + 2a_0\varkappa^2| \leqq 2a_0\varkappa,$$

som atter er ækvivalent med III. Hermed er Theorem 1 fuldstændigt bevist.

Anm. 1. Naar vi i Theorem 1 sætter $-y$ for y, $-A$ for A, og altsaa $-y_0$ for y_0, bliver I og II uforandrede; disse Uligheder gælder saaledes uforandrede for $\Re(y) > A$.

Anm. 2. For $\varkappa = 0$ eller $x = x_0, x_1, \ldots x_n$ indtræder Lighedstegnet stedse i I, II og III. Det indtræder for enhver Værdi af x i det betragtede Omraade, naar

$$\frac{y - y_0}{y - y_0 - 2a_0} = \gamma R^{n+1}\prod_{\nu=0}^{n}\frac{x - x_\nu}{R^2 - \bar{x}_\nu x} \quad \text{eller} \quad y = y_0 - 2(A - \Re y_0)\frac{\gamma R^{n+1}\prod\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x - x_\nu}{R^2 - \bar{x}_\nu x}}{1 - \gamma R^{n+1}\prod\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{x - x_\nu}{R^2 - \bar{x}_\nu x}},$$

hvor $|\gamma| = 1$ (se Anm. til Hjælpesætning 6, ovenfor S. 14).

Theorem 2. Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger er

$$|y - y_0| \leqq 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa}{1 - \varkappa}.$$

Beviset følger af Theorem 1, I ved a fortiori at erstatte højre Side med $|y - y_0|\varkappa + 2a_0\varkappa$ *).

Anm. 1. Af Uligheden i dette Theorem følger igen nogle af Forudsætningerne, nemlig $y = y_0$ for $x = x_1, x_2, \ldots x_n$.

Anm. 2. For $\varkappa = \varkappa_0$ har vi

$$|y - y_0| \leqq 2(A - \Re y_0)\frac{R|x - x_0|}{|R^2 - \bar{x}_0 x| - R|x - x_0|},$$

som for $x_0 = 0$, giver os en Sætning af Lindelöf (l. c. [11]), S. 15)

$$|y - y(0)| \leqq 2\big(A - \Re y(0)\big)\frac{|x|}{R - |x|},$$

hvoraf a fortiori følger Carathéodory's Sætning (se ovenfor S. 6) **).

---

*) I et specielt Tilfælde, nemlig naar man ved, at x har en saadan Værdi, at $\Re(y) \geqq \Re(y_0)$, vil Theorem 1, II give en nøjagtigere Ulighed: $|y - y_0| \leqq 2(A - \Re y_0)\dfrac{\varkappa}{\sqrt{1 - \varkappa^2}}$.

**) Af Theorem 2 følger a fortiori i det almindelige Tilfælde

$$|y| \leqq |y_0| + 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa}{1 - \varkappa} \leqq |\Im y_0| + 2A\frac{\varkappa}{1 - \varkappa} + |\Re y_0|\frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa},$$

som direkte Generalisation af Carathéodory's Sætning.

Antager vi $x \neq x_0$, og dividerer vi den almindeligere Formel med $|x - x_0|$ samt lader $x_0 \to x$, har vi en anden Sætning af Lindelöf (ibid.)

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqq 2R\frac{A - \Re(y)}{R^2 - |x|^2},$$

som vi senere skal komme tilbage til.

Theorem 3. Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger, og idet η er en Konstant, er

$$|y - \eta| \geqq \left|\eta - y_0 + 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right| - 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2},$$

$$|y - \eta| \leqq \left|\eta - y_0 + 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right| + 2(A - \Re y_0)\frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2}.$$

Beviset følger a fortiori af Theorem 1, III ved at erstatte venstre Side af Uligheden med respektive

$$\left|\eta - y_0 + 2a_0\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right| - |y - \eta| \quad \text{og} \quad |y - \eta| - \left|\eta - y_0 + 2a_0\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right|.$$

Anm. 1. For $\varkappa = 0$ reducerer de to Uligheder sig til Identiteter.

Anm. 2. For $\eta = y_0$ reducerer den nederste Ulighed sig til Theorem 2.

Anm. 3. Vi bemærker som specielt Tilfælde af Theorem 3 for $\eta = 0$, $\varkappa = \varkappa_0$ (med Benyttelse af Identiten i Hjælpesætning 2):

$$|y| \geqq \left|y_0 - 2(A - \Re y_0)\frac{R^2|x - x_0|^2}{(R^2 - |x_0|^2)(R^2 - |x|^2)}\right| - 2(A - \Re y_0)\frac{R|x - x_0|\,|R^2 - \bar{x}_0 x|}{(R^2 - |x_0|^2)(R^2 - |x|^2)}$$

og

$$|y| \leqq \left|y_0 - 2(A - \Re y_0)\frac{R^2|x - x_0|^2}{(R^2 - |x_0|^2)(R^2 - |x|^2)}\right| + 2(A - \Re y_0)\frac{R|x - x_0|\,|R^2 - \bar{x}_0 x|}{(R^2 - |x_0|^2)(R^2 - |x|^2)}.$$

For $x_0 = 0$ reducerer den nederste af disse to Formler sig til en Sætning af Lindelöf (ibid.), (dog skrevet paa en simplere Form),

$$|y| \leqq \left|y(0) - 2\big(A - \Re y(0)\big)\frac{|x|^2}{R^2 - |x|^2}\right| + 2\big(A - \Re y(0)\big)\frac{R|x|}{R^2 - |x|^2}.$$

Ogsaa af denne Sætning følger a fortiori Carathéodory's Sætning.

Theorem 4. Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger, idet η er en Konstant $\neq y_0$, og $\Re(\eta) < A$ *), vil

$$y \neq \eta, \quad \text{naar } \varkappa = \varkappa_0\varkappa_1 \ldots \varkappa_n < \left|\frac{y_0 - \eta}{y_0 + \bar{\eta} - 2A}\right|.\text{**)}$$

---

*) For $\Re(\eta) \geqq A$ vil $y \neq \eta$ i hele det givne Omraade $|x| < R$.

**) Denne Betingelse kan ogsaa skrives saaledes:

$$\varkappa^2 < \frac{|y_0 - \eta|^2}{|y_0 - \eta|^2 + 4(A - \Re y_0)(A - \Re\eta)}.$$

Bevis. Vi betragter Funktionen

$$\frac{y-\eta}{y+\bar{\eta}-2A}=\frac{y-\eta}{y-\eta-2(A-\Re\eta)}$$

som er en regulær Funktion af x, fordi $\Re(y+\bar{\eta}-2A)<0$ ifølge Forudsætningerne. Ifølge Beviset for Theorem 1 (ved at sætte η for y_0) ser vi øjeblikkeligt, at Funktionen er absolut <1, og at den antager Værdien

$$\frac{y_0-\eta}{y_0+\bar{\eta}-2A}\neq 0$$

for $x=x_0, x_1, \ldots x_n$. Ifølge § 3, Theorem 4 (ovenfor S. 19) er hermed Beviset ført. (Et andet, men mindre simpelt Bevis faar man ved venstre Side af Theorem 3 og Anvendelse af a-Methoden. At gennemføre dette, overlades til Læseren).

Korollar. For $\varkappa=\varkappa_0$ har man

$$y\neq\eta,\quad\text{naar}\ \left|\frac{R(x-x_0)}{R^2-\bar{x}_0x}\right|<\left|\frac{y_0-\eta}{y_0+\bar{\eta}-2A}\right|,$$

eller (ifølge Hjælpesætning 4, idet vi sætter x for u, x_0 for u_0, $\left|\frac{y_0-\eta}{y_0+\bar{\eta}-2A}\right|$ for k, hvorved $\left|\frac{y_0-\eta}{y_0+\bar{\eta}-2A}\right||x_0|<|x_0|<R$), ækvivalent hermed

$$y\neq\eta,\quad\text{naar}\ \left|x-x_0\frac{R^2\left(|y_0+\bar{\eta}-2A|^2-|y_0-\eta|^2\right)}{R^2|y_0+\bar{\eta}-2A|^2-|x_0(y_0-\eta)|^2}\right|<R\,\frac{(R^2-|x_0|^2)\,|y_0+\bar{\eta}-2A|\,|y_0-\eta|}{R^2|y_0+\bar{\eta}-2A|^2-|x_0(y_0-\eta)|^2}$$

og specielt

$$y\neq 0,\quad\text{naar}\ \left|x-x_0\frac{R^2(|y_0-2A|^2-|y_0|^2)}{R^2|y_0-2A|^2-|x_0y_0|^2}\right|<R\,\frac{(R^2-|x_0|^2)\,|y_0-2A|\,|y_0|}{R^2|y_0-2A|^2-|x_0y_0|^2}.$$

Naar man vil nøjes med et mindre Omraade, har man den simplere Sætning:

$$y\neq\eta,\quad\text{naar}\ |x-x_0|<\frac{(R^2-|x_0|^2)\,|y_0-\eta|}{R\,|y_0+\bar{\eta}-2A|+|x_0(y_0-\eta)|},$$

som man lettest finder ved a fortiori at erstatte $|R^2-\bar{x}_0x|$ med $R^2-|x_0|^2-|x_0(x-x_0)|$ i den først angivne Betingelse.

Theorem 5. Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger er

$$-(A-\Re y_0)\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}\leqq\Re(y-y_0)\leqq(A-\Re y_0)\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}$$

eller

$$-A\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}+\Re(y_0)\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\leqq\Re(y)\leqq A\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}+\Re(y_0)\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}.$$

Bevis. Af Theorem 1, II følger a fortiori

$$\left(\Re(y-y_0)\right)^2=(a_0-a)^2\leqq 4a_0a\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2},$$

eller ækvivalent $(a_0-a)^2\leqq(a_0+a)^2\varkappa^2$, eller $\varkappa\geqq\frac{|a-a_0|}{a+a_0}$, eller

$$\varkappa \geqq \frac{a-a_0}{a+a_0} \geqq -\varkappa\,, \quad \text{eller} \quad a_0\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \leqq a \leqq a_0\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\,,$$

som er ækvivalent med de Uligheder, som skulde bevises.

Anm. 1. For $\varkappa = 0$ reducerer de to Uligheder sig til Identiteter. Antages Ulighederne at gælde for en vis Funktion y, saa følger omvendt af Ulighederne tilhøjre $\Re(y) = \Re(y_0)$ for $\varkappa = 0$, og endvidere har man a fortiori $\Re(y-y_0) < A - \Re(y_0)$ eller $\Re(y) < A$.

Anm. 2. For $\varkappa = \varkappa_0$ har man

$$-(A-\Re y_0)\frac{2R\,|x-x_0|}{|R^2-\bar{x}_0 x|-R\,|x-x_0|} \leqq \Re(y-y_0) \leqq (A-\Re y_0)\frac{2R\,|x-x_0|}{|R^2-\bar{x}_0 x|+R\,|x-x_0|}\,,$$

hvoraf for $x_0 = 0$ følger en Formel af Lindelöf (l. c. [11]), S. 15).

$$-\big(A-\Re\, y(0)\big)\frac{2\,|x|}{R-|x|} \leqq \Re\big(y-y(0)\big) \leqq \big(A-\Re y(0)\big)\frac{2\,|x|}{R+|x|}\,.$$

Korollar. Naar man har $A' < \Re(y) < A$, er

$$(A'-\Re\, y_0)\frac{2\varkappa}{1+\varkappa} \leqq \Re(y-y_0) \leqq (A-\Re\, y_0)\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}\,.$$

Beviset følger ved at anvende Uligheden til højre, som vi allerede kender fra Theorem 5, paa Funktionen $-y$, idet $\Re(-y) < -A'$.

Theorem 6. Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger er

$$|\Im(y-y_0)| \leqq 2(A-\Re y_0)\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2}\,.$$

Beviset læses umiddelbart ud af Theorem 1, III ved a fortiori i venstre Side at erstatte $y-y_0+2a_0\dfrac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}$ med den „imaginære Del“ deraf*).

Anm. 1. For $\varkappa = 0$ følger af Uligheden, at $\Im(y) = \Im(y_0)$. Tages altsaa Ulighederne i Theoremerne 5 og 6 tilsammen, giver disse igen alle de Forudsætninger, vi gik ud fra, nemlig $y(x_\nu) = y(x_0)$ for $\nu = 1, 2, \ldots, n$ og $\Re(y) < A$.

Anm. 2. For $\varkappa = \varkappa_0$ haves

$$|\Im(y-y_0)| \leqq 2(A-\Re\, y_0)\frac{R\,|x-x_0|\cdot|R^2-\bar{x}_0 x|}{(R^2-|x_0|^2)(R^2-|x|^2)}\,,$$

som for $x_0 = 0$ giver en Formel af Lindelöf (ibid.)

$$|\Im\big(y-y(0)\big)| \leqq 2\big(A-\Re\, y(0)\big)\frac{R\,|x|}{R^2-|x|^2}\,.$$

---

*) I det specielle Tilfælde, hvor man ved, at x har en saadan Værdi, at $\Re(y) \geqq \Re(y_0)$, vil Theorem 1, II give en nøjagtigere Ulighed: $|\Im(y-y_0)| \leqq 2(A-\Re\, y_0)\dfrac{\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\,.$

Theorem 7 angaaende Differentialkvotienten af y.

Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger er

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq 2R\frac{A-\Re(y)}{R^2-|x|^2} \leq 2R\frac{A-\Re(y_0)}{R^2-|x|^2}\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}.\ ^{*)}$$

Bevis. Den første Ulighed er allerede bekendt fra Anm. 2 til Theorem 2. Den anden Ulighed følger ved a fortiori at erstatte $a = A - \Re(y)$ med $a_0\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} = (A - \Re y_0)\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$ i Henhold til den sidste Ulighed i Beviset for Theorem 5.

Anm. 1. For $\varkappa = 0$ er der Identitet imellem andet og tredje Led; det førstnævnte kan derfor udskydes, uden at Formlen derfor bliver mindre omfattende. Heller ikke det første Lighedstegn kan undværes; thi Funktionen $y = 2A\frac{x}{R+x}$, (hvor A antages positiv, da $y(0) = 0$), opfylder Betingelsen $\Re(y) < A$ for $|x| < R$, og man har $\left|\frac{dy}{dx}\right| = 2R\frac{A-\Re(y)}{R^2-|x|^2}$ **).

Anm. 2. Skriver vi y som hel Potensrække af x

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots,$$

(med en Konvergensradius, som er $\geq R$), giver den første Ulighed i Theorem 7, som Lindelöf har bemærket (ibid.), Relationen

$$R|c_1| \leq 2(A - \Re c_0).$$

Ligesom i Anm. 2 til Theorem 5 i § 3 kan vi heraf (for q hel positiv) udlede den almindeligere Relation

$$R^q|c_q| \leq 2(A - \Re c_0).$$

Theorem 8 angaaende Differenskvotienten af y.

Under de i Theorem 1 gældende Forudsætninger, er for $x \neq x^*$

$$\left|\frac{y-y^*}{x-x^*}\right|^2 \leq 4R^2\,\frac{(A-\Re y)(A-\Re y^*)}{(R^2-|x|^2)(R^2-|x^*|^2)},$$

idet x^* er en ny uafhængig variabel, og $y^* \equiv y(x^*)$.

Naar omvendt denne Ulighed er opfyldt, og der eksisterer en vis Værdi af x, for hvilken $\Re(y) < A$, vil $\Re(y) < A$ for alle x.

---

*) Hvis man desuden ved, at $\Re(y) > A'$, har man a fortiori

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < 2R\frac{A-A'}{R^2-|x|^2}.$$

**) Lighedstegnet indtræder mere almindeligt for Funktionen

$$y = y_0 + 2\gamma(A - \Re y_0)\frac{R(x-x_0)}{R^2 - \bar{x}_0 x + \gamma R(x-x_0)},$$

hvor x_0, y_0 og γ er Konstanter, som opfylder Betingelserne $|x_0| < R$, $\Re(y_0) < A$, $|\gamma| = 1$.

Bevis. Theorem 1, II udsiger for $\varkappa = \varkappa_0$, at Uligheden

$$|y - y_0|^2 \leq 4\, a_0 a \frac{\varkappa_0^{\,2}}{1 - \varkappa_0^{\,2}} = |x - x_0|^2 \cdot 4 R^2 \frac{a_0 a}{(R^2 - |x_0|^2)(R^2 - |x|^2)}$$

er af 1ste Klasse, saafremt der gives et x_0, for hvilket $\Re(y_0) < A$. Med Ombytning af x_0 med x^* er Beviset ført.

Anm. Ønsker vi, at der paa højre Side af Uligheden i Theorem 8 ikke maa forekomme y eller y^*, erstatter vi a fortiori (som i foregaaende Theorem)

$$A - \Re(y) \quad \text{med} \quad (A - \Re y_0) \frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa}$$

og

$$A - \Re(y^*) \quad \text{med} \quad (A - \Re y_0) \frac{1 + \varkappa^*}{1 - \varkappa^*}.$$

Ganske som i Anm. 2 til Theorem 6, § 3 kan dette varieres paa flere Maader.

(Forts. fra Omslagets S. 2.)

		Kr.	Øre
	VI, med 4 Tavler. 1890—92	13.	75.
1.	**Lorenz, L.** Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle. 1890	2.	•
2.	**Sørensen, William.** Om Forbeninger i Svømmeblæren, Pleura og Aortas Væg og Sammensmeltningen deraf med Hvirvelsøjlen særlig hos Siluroiderne, samt de saakaldte Weberske Knoglers Morfologi. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1890	3.	80.
3.	**Warming, Eug.** Lagoa Santa. Et Bidrag til den biologiske Plantegeografi. Med en Fortegnelse over Lagoa Santas Hvirveldyr. Med 43 Illustrationer i Texten og 1 Tavle. Résumé en francais. 1892	10.	85.
	VII, med 4 Tavler. 1890—94	13.	75.
1.	**Gram, J. P.** Studier over nogle numeriske Funktioner. Résumé en français. 1890	1.	10.
2.	**Prytz, K.** Methoder til korte Tiders, særlig Rotationstiders, Udmaaling. En experimental Undersøgelse. Med 16 Figurer i Texten. 1890	1.	50.
3.	**Petersen, Emil.** Om nogle Grundstoffers allotrope Tilstandsformer. 1891	1.	60.
4.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 4de Afhandling. Med c. 185 mest af Forfatteren tegnede Figurer i 34 Grupper. Résumé et explication des figures en français. 1891	1.	50.
5.	**Christensen, Odin T.** Rhodanchromammoniakforbindelser. (Bidrag til Chromammoniakforbindelsernes Kemi. III.) 1891	1.	25.
6.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Scopelini Musei Zoologici Universitatis Hauniensis. Bidrag til Kundskab om det aabne Havs Laxesild eller Scopeliner. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1892	3.	50.
7.	**Petersen, Emil.** Om den elektrolytiske Dissociationsvarme af nogle Syrer. 1892	1.	25.
8.	**Petersen, O. G.** Bidrag til Scitamineernes Anatomi. Résumé en français. 1893	2.	75.
9.	**Lütken, Chr.** Andet Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1893	•	85.
10.	**Petersen, Emil.** Reaktionshastigheden ved Methylætherdannelsen. 1894	1.	50.
	VIII, med 3 Tavler. 1895—98	12.	25.
1.	**Meinert, F.** Sideorganerne hos Scarabæ-Larverne. Les organes latéraux des larves des Scarabés. Med 3 Tavler. Résumé et explication des planches en français. 1895	3.	30.
2.	**Petersen, Emil.** Damptryksformindskelsen af Methylalkohol. 1896	1.	•
3.	**Buchwaldt, F.** En mathematisk Undersøgelse af, hvorvidt Vædsker og deres Dampe kunne have en fælles Tilstandsligning, baseret paa en kortfattet Fremstilling af Varmetheoriens Hovedsætninger. Résumé en français. 1896	2.	25.
4.	**Warming, Eug.** Halofyt-Studier. 1897	3.	•
5.	**Johannsen, W.** Studier over Planternes periodiske Livsyttringer. I. Om antagonistiske Virksomheder i Stofskiftet, særlig under Modning og Hvile. 1897	3.	75.
6.	**Nielsen, N.** Undersøgelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelse paa Rækker og Integraler. 1898.	1	60.
	IX, med 17 Tavler. 1898—1901	17.	•
1.	**Steenstrup, Japetus,** og **Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Klump- eller Maanefiskene (*Molidæ*). Med 4 Tavler og en Del Xylografier og Fotogravurer. 1898	4.	75.
2.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 5te Afhandling. Med 42 Figurgrupper. Résumé en français. 1899	1.	60.
3.	**Meyer, Kirstine.** Om overensstemmende Tilstande hos Stofferne. En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisafhandling. Med en Tavle. 1899	2.	60.
4.	**Jorgensen, S. M.** Om Zeise's Platosemiæthylen- og Cossa's Platosemiamminsalte. Med 1 Tavle. 1900	•	75.
5.	**Christensen, A.** Om Overbromider af Chinaalkaloider. 1900	1.	•
6.	**Steenstrup, Japetus.** Heteroteuthis *Gray*, med Bemærkninger om Rossia-Sepiola-Familien i Almindelighed. Med en Tavle. 1900	•	90.
7.	**Gram, Bille.** Om Proteinkornene hos oliegivende Frø. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	2.	50.
8.	**Meinert, Fr.** Vandkalvelarverne (*Larvæ Dytiscidarum*) Med 6 Tavler. Résumé en français. 1901	5.	35.
	X, med 4 Tavler. 1899—1902	10.	50.
1.	**Juel, C.** Indledning i Læren om de grafiske Kurver. Résumé en français. 1899	2.	80.
2.	**Billmann, Einar.** Bidrag til de organiske Kvægsølvforbindelsers Kemi. 1901	1.	80.
3.	**Samsøe Lund** og **Rostrup, E.** Marktidselen (*Cirsium arvense*). En Monografi. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	6.	•
4.	**Christensen, A.** Om Bromderivater af Chinaalkaloiderne og om de gennem disse dannede brintfattigere Forbindelser. 1902	1.	40.
	XI, med 10 Tavler og 1 Kort. 1901—03	15.	05.
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceæ. 6te Afhandling. Med 47 Figurgrupper. Résumé en français. 1901.	2.	15.
2.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. I. Lamellibranchiater. Med 1 Kort og 4 Tavler. 1902.	4.	•
3.	**Winther, Chr.** Rotationsdispersionen hos de spontant aktive Stoffer. 1902	2.	•
4.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. II. Scaphopoder, Gastropoder og Cephalopoder. Med 5 Tavler. 1902	3.	40.
5.	**Winther, Chr.** Polarimetriske Undersøgelser II: Rotationsdispersionen i Opløsninger	1.	60.
6.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. III. Stratigrafiske Undersøgelser. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1903	3.	85.
	XII, med 3 Tavler og 1 Kort. 1902—04	10.	50.
1.	**Forch, Carl, Knudsen, Martin,** und **Sørensen, S. P. L.** Berichte über die Konstantenbestimmungen zur Aufstellung der hydrographischen Tabellen. Gesammelt von *Martin Knudsen.* 1902	4.	75.
2.	**Bergh, R.** Gasteropoda opisthobranchiata. With three plates and a map. (The Danish expedition to Siam 1899—1900, I.) 1902	3.	45.
3.	**Petersen, C. G. Joh., Jensen, Søren, Johansen, A. C.,** og **Levinsen, J. Chr. L.** De danske Farvandes Plankton i Aarene 1898—1901. 1903	3.	25.
4.	**Christensen, A.** Om Chinaalkaloidernes Dibromadditionsprodukter og om Forbindelser af Alkaloidernes Chlorhydrater med højere Metalchlorider. 1904	1.	35.

Mathematiske og astronomiske Skrifter

udgivne af det Kgl. danske Videnskabernes Selskab

(udenfor Skrifternes 6. Række, se Omslagets S. 2—3):

	Kr.	Øre
Braae, Joh. Meridianbeobachtungen von 304 B- und M-Sternen. 1914	»	65
Hansen, C. Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence. 1908	1.	20
Hansen, P. C. V. En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen $M + N\frac{dy}{dx} = 0$. 73	»	65
Hansteen, C. Den magnetiske Inclinations Forandring i den nordlige tempererte Zone. I, med et Kort. 55	2.	»
—— —— —— II. 57	1.	15
Hertzsprung, S. Reduktion af Maskelynes Iagttagelser af smaa Stjerner. 65	1.	15
Hjelmslev, J. Om Regning med lineære Transformationer. 1911	»	90
—— Grundlag for Fladernes Geometri. 1914	1.	65
Juel, C. Om ikke-analytiske Kurver. 1906	1.	95
—— Om simple cykliske Kurver. 1911	»	65
—— Einleitung in die Teorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung. 1914	1.	75
Nielsen, N. Recherches sur une classe de fonctions méromorphes 1904	1.	45
—— Recherches sur les fonctions sphériques. 1906	1.	75
—— Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel. 1907	1.	20
—— Recherches sur les nombres de Bernoulli. 1913	2.	40
—— Recherches sur les fonctions de Bernoulli. 1915	1.	65
Nørlund, N. E. Ueber lineare Differenzengleichungen. 1911	»	65
—— Untersuchungen über die Eigenbewegungen für 140 Sternen des IV. Secchischen Typus mittels älterer und eigener Beobachtungen. 1912	1.	40
Ramus, C. Undersøgelse af Resten i Lagranges Række, samt: Om en Egenskab ved de lineære Differential-Ligninger med 2 Variable. 42	»	65
—— Om nogle Curvers Rectification ved elliptiske Functioner. 45	»	50
—— Om Ellipsoiders Tiltrækning og om de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af flydende Masser. 45	1.	65
Schjellerup, H. C. F. C. Tycho Brahes Original-Observationer benyttede til Banebestemmelse af Cometen 1580. 54	1.	»
Steen, A. Hovedsætninger om de overelliptiske Funktioner og: Om dobbelte bestemte Integraler. 49	»	65
—— Om Integrationen af Differentialligninger. Résumé en français. 68	»	35
—— Om Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer. 69	»	40
—— Læren om homogene tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer, m. 1 Tavle. Résumé en français. 72	»	75
—— Om Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner. 75	»	75
Strömgren, E. Ueber den Ursprung der Kometen. 1914	2.	»
Thiele, T. N. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en «systematisk» Karakter. 80	»	85
Zeuthen, H. G. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, m. 5 Tavler. Résumé en français. 73	3.	60

	Kr.	Øre
d'Arrest H. L. Siderum nebulosorum observationes Havnienses. 67	12.	»
Hansen & Olufsen. Tables du soleil. 53	4.	»
—— —— Supplément aux tables du soleil. 57	»	35
Jürgensen, Chr. Sur le mouvement du pendule. 53	»	65
Schjellerup, H. C. F. C. Stjernefortegnelse, indeholdende 10,000 Positioner og teleskopiske Fixstjerner imellem — 15 og + 15 Graders Deklination. Med 1 Tavle. 64	7.	»